

TEOREMA LUI TOEPLITZ

- Matrice triunghiulară infinită
- Teorema lui Otto Toeplitz
- Teorema Cesàro - Stolz
- Probleme rezolvate

Profesor: SILVIU BOGA, silviumath@yahoo.com

Surse bibliografice:

1. Matematică pentru grupele de excelență, clasa a XI-a, autor V. Pop și colaboratori, Ed. "Dacia Educațional"
2. Matematică pentru grupele de excelență, clasa a XI-a - Exerciții și probleme, autor V. Pop și colaboratori - Ed. "Dacia Educațional"

. Teorema lui O. Toeplitz

3.1. Teorema lui Toeplitz

În această lecție vom enunța și demonstra teorema lui O. Toeplitz, după care vom da câteva consecințe importante ale ei și apoi aplicații la calculul unor limite de șiruri.

Definiția 3.1.1 Se numește matrice infinită sau șir dublu de numere reale o funcție $f : N^* \times N^* \rightarrow R$. Se notează prin $(a_{nk})_{n,k \geq 1}$, unde $a_{nk} = f(n, k)$, $n, k \in N^*$. O matrice infinită se numește matrice triunghiulară dacă $a_{nk} = 0$, $\forall n, k \in N^*, k > n$, adică este de forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.1.1. Fie $(a_{nk})_{n,k \geq 1}$ o matrice triunghiulară infinită de numere reale și un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale. Dacă

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0, \forall k \in N^*$;
- (ii) există $M \in R_+^*$ astfel încât $\sum_{k=1}^n |a_{nk}| \leq M, \forall n \in N^*$;
- (iii) există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$,

atunci șirul $(u_n)_{n \geq 1}$, definit prin $u_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k, n \in N^*$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Demonstrație. Din $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N, \forall n \in N,$

$n \geq n_\varepsilon$, avem că $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Pentru $\forall n \in N, n \geq n_\varepsilon$ avem

$$|u_n| \leq \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k \right| + \left| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^n a_{nk} x_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k \right| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^n |a_{nk}| \cdot |x_k| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k \right| + \left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^n |a_{nk}| \right) \cdot \frac{\varepsilon}{2M}, \text{ de unde, ținând seama de (ii), obținem}$$

$$(1) \quad |u_n| \leq \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k \right| + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \in N, \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} x_k \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} \right) = 0$, rezultă că $\exists m_\varepsilon \in N$, astfel încât

$$(2) \quad \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_{nk} x_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \in N, \quad n \geq m_\varepsilon.$$

Din (1) și (2), $\forall n \in N, \quad n \geq \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$, avem că $|u_n| < \varepsilon$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Teorema 3.1.2. (Toeplitz). Fie $(a_{nk})_{n,k \geq 1}$ o matrice triunghiulară infinită de numere reale și

un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale. Dacă

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0, \quad \forall k \in N^*;$$

$$(ii) \quad \text{există } M \in R_+^* \text{ astfel încât } \sum_{k=1}^n |a_{nk}| \leq M, \quad \forall n \in N^*;$$

$$(iii) \quad \text{există } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1;$$

$$(iv) \quad \text{există } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad x \in R,$$

atunci șirul $(u_n)_{n \geq 1}$, definit prin $u_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k$, $n \in N^*$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Demonstrație. Avem că $u_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} (x_n - x) + x \sum_{k=1}^n a_{nk}$, $\forall n \in N^*$. Aplicând

teorema 3.1.1. șirului $(x_n - x)_{n \geq 1}$ și ținând seama de condiția (iii), rezultă afirmația din enunț.

Teorema 3.1.3. Fie $(a_{nk})_{n,k \geq 1}$ o matrice triunghiulară infinită de numere reale pozitive și un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale. Dacă

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0, \quad \forall k \in N^*;$$

$$(ii) \quad \text{există } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1;$$

$$(iii) \quad \text{există } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \{-\infty, +\infty\},$$

atunci șirul $(u_n)_{n \geq 1}$, definit prin $u_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k$, $n \in N^*$ are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Demonstrație. Considerăm cazul $x = +\infty$. Fie $\varepsilon > 0$. Din $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ rezultă că există $m = m(\varepsilon) \in N$ (m depinde de ε), astfel încât

$$(3) \quad x_n > 3\varepsilon, \quad \forall n \in N, \quad n \geq m.$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m) = \sum_{k=1}^m x_k (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk}) = 0$, există $m' \in N$,

$\forall n \in N, n \geq m'$ avem că $|a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m| < \varepsilon$, sau

$$(4) \quad -\varepsilon < a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m < \varepsilon, \quad \forall n \in N, n \geq m'.$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1, \forall k \in N^*$, rezultă că există $m'' \in N$, astfel încât

$$(5) \quad a_{nm+1} + a_{nm+2} + \dots + a_{nn} \geq \frac{2}{3}, \quad \forall n \in N, \quad n \geq m''.$$

Fie $m_0 = \max(m, m', m'')$. Atunci pentru $\forall n \in N, n \geq m_0$, ținând seama de (3)-(5), avem că

$$\begin{aligned} u_n &= (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m) + \\ &+ (a_{nm+1}x_1 + a_{nm+2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) > -\varepsilon + 3\varepsilon(a_{nm+1} + a_{nm+2} + \dots + a_{nn}) \geq \\ &\geq -\varepsilon + 3\varepsilon \cdot \frac{2}{3} = \varepsilon, \text{ ceea ce înseamnă că } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty. \end{aligned}$$

cazul când $x = -\infty$.

O altă formulare a teoremei lui Toeplitz este dată de teorema 3.1.4.

Teorema 3.1.4. Fie $(a_{nk})_{n,k \geq 1}$ o matrice triunghiulară infinită de numere reale pozitive și un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale. Dacă

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0, \quad \forall k \in N^*;$$

$$(ii) \quad \sum_{k=1}^n a_{nk} = 1, \quad \forall n \in N^*;$$

$$(iii) \quad \text{există } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \overline{R},$$

atunci şirul $(u_n)_{n \geq 1}$, definit prin $u_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k$, $n \in N^*$ are limită şi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Demonstraţie. Demonstraţia este similară cu demonstraţiile din teoremele 3.1.1, 3.1.2 şi 3.1.3.

Consecinţa 3.1.1. Fie un şir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale care are limită. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Demonstraţie. În teorema 3.1.4 se consideră matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Consecinţa 3.1.2. Fie un şir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive care are limită. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Demonstraţie. Se aplică consecinţa 3.1.1 şirului $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geq 1}$.

Consecinţa 3.1.3. Fie un şir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive care are limită. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Demonstrație. În inegalitatea mediilor

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad n \in N^*, \text{ ținând seama de}$$

consecința 3.1.1 și consecința 3.1.2 se trece la limită.

Consecința 3.1.4. Fie un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive. Dacă șirul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n \geq 1}$ are limită, atunci șirul $(\sqrt[n]{x_n})_{n \geq 2}$ are limită și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Demonstrație. Fie șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ definit prin $y_1 = x_1$, $y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$, $\forall n \in N, n \geq 2$.

Atunci $x_n = y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$, $\forall n \in N^*$ și aplicând consecința 3.1.3 avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Teorema 3.1.5. (Stolz-Cesaro) Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ două șiruri de numere reale cu proprietățile

(i) șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător, strict pozitiv și nemărginit ;

(ii) există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{R}$.

Atunci există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Demonstrație. Fie șirurile $(\Delta a_n)_{n \geq 1}$, $(\Delta b_n)_{n \geq 1}$, definite prin $a_0 = b_0 = 0$,

$\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$, $\Delta b_n = b_n - b_{n-1}$, $\forall n \in N^*$. Avem relația

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta b_1}{b_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\Delta b_1}{b_2} & \frac{\Delta b_2}{b_2} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\Delta b_1}{b_n} & \frac{\Delta b_2}{b_n} & \dots & \frac{\Delta b_n}{b_n} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\Delta a_1}{\Delta b_1} \\ \frac{\Delta a_2}{\Delta b_2} \\ \dots \\ \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{b_1} \\ \frac{a_2}{b_2} \\ \dots \\ \frac{a_n}{b_n} \\ \dots \end{pmatrix}$$

deoarece $\sum_{k=1}^n \frac{\Delta b_k}{b_n} \cdot \frac{\Delta a_k}{\Delta b_k} = \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^n \Delta a_k = \frac{a_n}{b_n}, \forall n \in N^*.$

Matricea infinită din membrul stâng satisface condițiile din teorema 3.1.2 sau teorema 3.1.3.

Bibliografie

- [1] Achim, I., Transformări de șiruri, G.M. 7-8/1998, pag. 273-282.
- [2] Bătinețu, D.M., Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu, Editura Albatros, București, 1979
- [3] Bătinețu, D.M. și colectiv, Exerciții și probleme de analiză matematică pentru clasele a XI-a și a XII-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [4] Miu, I.C., Câteva probleme de matematică, Craiova S.C. Chimenerg S.A., pag. 33-45.
- [5] Sirețchi, Gh., Analiză matematică vol. III, Fasc.1 ed III, Centrul de multiplicare al Universității București, 1984
- [6] Sirețchi, Gh., Teorema lui Toeplitz și câteva consecințe ale sale, Gazeta Matematică nr.3/1985, pag. 65-70.

Probleme rezolvate

R3.2.1. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $x \in \mathbb{R}$. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \dots + \frac{x_n}{n} \right) = x.$$

Soluție. Se consideră $a_{nk} = \frac{1}{n-k}$, $n, k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$,

$$k \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n |a_{nk}| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n-k} < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \right) = 0,$$

sunt îndeplinite condițiile din

teorema 3.1.2, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n-k} x_k = x$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n-k} x_k = x$.

R3.2.2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $x \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx + (n-1)x + \dots + 1 \cdot x_{n-1} + 1 \cdot x_n}{n} = x.$$

Soluție. Se consideră $a_{nk} = \frac{(n-k+1)}{n}$, $n, k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$. Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0, k \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n |a_{nk}| = \frac{n(n+1)}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{n} \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, sunt îndeplinite condițiile din teorema 3.1.2, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)}{n} \cdot x_k = x, \text{ de unde rezultă concluzia.}$$

R3.2.3. Fie un şir $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale care are limită. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k C_n^k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Soluție. Se consideră matricea

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C & -C & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -C & -C & -C & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots C_n & \dots C_n & \dots C_n & \dots & \dots C_n & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

deci $a_{nk} = \dots C_n^k$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Se aplică teorema 3.1.2 sau teorema 3.1.3.