**Puteri – Lecţia 2**

***Doru Turbatu – C. N. Emil Racoviţă***

***Gabriel Popa – Colegiul Naţional***

**5. Pătrate şi cuburi perfecte**

1. Arătaţi că suma primelor n numere naturale impare este un pătrat perfect.

**2.** Demonstraţi că numărul A = 22 – 12 + 42 – 32 + 62 – 52 +...+ 2882 – 2872 este pătrat perfect.

**3.** Arătaţi că următoarele numere sunt pătrate perfecte, oricare ar fi :

a) A = 8n+1 ∙ 2n+3 + 3 ∙ 8n ∙ 2n+1 + 15 ∙ 8n ∙ 2n+1; b) B = 32n+3 ⋅ 42n+3 – 22n+1 ⋅ 62n+3.

**4.** a) Determinaţi cifrele nenule şi distincte a şi b, ştiind că  este pătrat perfect.

b) Determinaţi cifra a, astfel încât numărul A =  să fie pătrat perfect.

**5.** a) Aflaţi perechile de cifre  pentru care numărul  este pătrat perfect.

b) Pentru ce perechi de cifre numărul menţionat devine cub perfect?

**6.** Arătaţi că suma primelor n numere naturale pare nu este pătrat perfect.

**7.** Arătaţi că următoarele numere nu pot fi pătrate perfecte:

a) A = 2n + 3n+1 + 5n+2 + 7n+3, unde ; b) B , unde .

**8.** a) Arătaţi că numărul A = 1 ⋅ 2 ⋅ 3 ⋅ ... ⋅ 2010 + 3 nu este pătrat perfect.

b) Arătaţi că numărul A = 1 ⋅ 2 ⋅ 3 ⋅ ... ⋅ 2010 nu este pătrat perfect.

**9.** Arătaţi că un număr natural (diferit de 1) care în baza 10 se scrie doar cu cifrele 1, 3, 5, nu poate fi pătrat perfect.

**10.** Demonstraţi că numerele de forma  (măcar două cifre) nu pot fi pătrate pefecte.

**11.** Fie n un număr natural nenul. Arătaţi că numărul 5n se poate scrie ca:

a) suma a două pătrate perfecte nenule; b) diferenţa a două pătrate perfecte nenule.

**12.** Arătaţi că  poate fi scris ca suma a trei pătrate perfecte nenule distincte, oricare ar fi n număr natural nenul. (Indicaţie: calculaţi în prealabil .)

**13.** Se consideră numărul A = 156n+2, n. Demonstraţi că A poate fi scris ca suma a cinci cuburi perfecte, oricare ar fi n.

**14.** Determinaţi pătratele perfecte de forma , unde .

**15.** Intercalaţi un număr de două cifre între cifrele numărului 111 astfel încât să se obţină un pătrat perfect.

**16.** Determinaţi cel mai mare număr natural  cu proprietatea că numerele a1, , …,  sunt pătrate perfecte.

**17.** Arătaţi că printre oricare cinci pătrate perfecte există două a căror diferenţă sau sumă este divizibilă cu 10.

**18.** a) Aflaţi resturile posibile ale împărţirii unui pătrat perfect la 7.

b) Demonstraţi că, dacă a, b sunt numere naturale astfel încât atunci 

c) Determinaţi numerele naturale a şi b pentru care 