



CLASA A VI-A
16 octombrie 2010

DIVIZIBILITATE: PROPRIETĂȚI SI CRITERII

Profesor susținător:
Cristina Timofte
Liceul de informatică
"Grigore Moisil"
Iași

Definiție : Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Spunem că a este divizibil prin b (notăm $a:b$) sau că b divide pe a (notăm bla)
dacă există $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c$.

Observație : Dacă $b \neq 0$ atunci $b \mid a$ dacă și numai dacă restul împărțirii lui a la b este 0.

Proprietăți :

1. $a \mid a, \forall a \in \mathbb{N}^*$;
2. Dacă $a \mid b$ și $b \mid a \Rightarrow a = b$;
3. Dacă $a \mid b$ și $b \mid c \Rightarrow a \mid c$;
4. $1 \mid a, \forall a \in \mathbb{N}$;
5. $a \mid 0, \forall a \in \mathbb{N}^*$;
6. Dacă $a \mid 1 \Rightarrow a = 1$;
7. Dacă $a \mid b$ și $a \mid c \Rightarrow a \mid b + c$ și $a \mid b - c$;
10. Dacă $a \mid b \Rightarrow a \mid b \cdot c, \forall c \in \mathbb{N}$;
11. Dacă $a \mid b_1, a \mid b_2, \dots, a \mid b_n \Rightarrow a \mid b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + \dots + b_n \cdot c_n, \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbb{N}$;
12. Dacă $a \mid b \Rightarrow a \cdot c \mid b \cdot c, \forall c \in \mathbb{N}^*$;
13. Dacă $a \cdot c \mid b \cdot c$ și $c \neq 0 \Rightarrow a \mid b$.
14. Dacă $a \mid c$ și $b \mid c$ iar $(a, b) = 1 \Rightarrow a \cdot b \mid c$.
15. Dacă $a \mid b \cdot c$ și $(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid c$.

Rețineți !

Dacă $a, b \in \mathbb{N}, a > b$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci au loc relațiile:

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \cdot (a^{2n} - a^{2n-1} \cdot b + a^{2n-2} \cdot b^2 - \dots - a \cdot b^{2n-1} + b^{2n}).$$

Folosind aceste formule se pot demonstra proprietățile:

Dacă $a, b \in \mathbb{N}, a > b$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

1. $a^n - b^n = M_{a-b}$;
 2. $a^n - 1 = M_{a-1}$;
 3. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = M_{a+b}$;
 4. $a^{2n+1} + 1 = M_{a+1}$;
 5. $(a+b)^n = M_a + b^n = M_b + a^n$;
 6. $(a-b)^{2n} = M_a + b^{2n} = M_b + a^{2n}$;
 7. $(a+b)^{2n+1} = M_a - b^{2n+1} = M_b - a^{2n+1}$.
- (cu M_k se notează un multiplu al numărului natural k).

PROPRIETĂȚI. CRITERII

1. Demonstrați că :

- a) dacă $a + c = b$, atunci $11 \mid \overline{abc}$;
- b) dacă $a + c = b + d$, atunci $11 \mid \overline{abcd}$;
- c) dacă $a + c + e = b + d$, atunci $11 \mid \overline{abcde}$.
- d) $11 \mid \overline{abc} \Leftrightarrow 11 \mid (a - b + c)$

2. Demonstrați că numărul $\overline{abc}$ este divizibil prin 8 dacă și numai dacă $4 \cdot a + 2 \cdot b + c$ este divizibil prin 8.
Generalizare.

3.

a) Fie $A = 2 \cdot a + 5 \cdot b$, $B = 3 \cdot a + 2 \cdot b$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$. Arătați că dacă $11 \mid A$ atunci $11 \mid B$. Este adevărată și reciprocă ?

b) Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, arătați că $31 \mid (5 \cdot a + 7 \cdot b) \Leftrightarrow 31 \mid (8 \cdot a + 5 \cdot b)$;

- c) Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2 \mid (6 \cdot a + 5 \cdot b)$ și $4 \mid (2 \cdot b + c)$. Să se afle ultima cifră a lui 3^c .
- d) Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ și $A = 3 \cdot a + 4 \cdot b + 5 \cdot c$, $B = 2 \cdot a + 5 \cdot b + 8 \cdot c$. Arătați că $7 \mid A \Leftrightarrow 7 \mid B$;
- e) Fie $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ și $A = x + 5 \cdot y + 3 \cdot z$, $B = 3 \cdot x + 4 \cdot y + z$. Arătați că dacă $11 \mid A$ și $11 \mid B$, atunci $11 \mid z$;

4.

- a) Demonstrați că dacă $19 \mid \overline{abcde}$, atunci $19 \mid \overline{abc} + 4 \cdot \overline{de}$. Este adevărată reciproca?
- b) Demonstrați că $47 \mid \overline{abcde}$ dacă și numai dacă $47 \mid 6 \cdot \overline{abc} + \overline{de}$;
- c) Demonstrați că $13 \mid \overline{abcde}$ dacă și numai dacă $13 \mid (\overline{cde} - \overline{ab})$;
- d) Să se arate că $\overline{abcd}$ este divizibil cu 101 dacă și numai dacă $\overline{bcda}$ este divizibil cu 101.

5. Fie a, b, c, x, y, z cifre în baza 10, $a \neq 0, x \neq 0$.

- a) Dacă $\overline{abc} \cdot 876 = \overline{xyzabc}$, demonstrați că $8 \mid \overline{abc}$ și $7 \mid \overline{xyz}$.
- b) Câte numere $\overline{abc}$ îndeplinesc condiția de la a) ?

6.

- a) Să se determine numerele de forma $\overline{abc}$ divizibile prin 7 cu proprietatea că $a = b + c$.
- b) Să se determine numerele de trei cifre divizibile prin 7 cu proprietatea că suma cifrelor lor este divizibilă prin 7.

7.

- a) Se divide numărul $N = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{99}$ prin 26 ? Justificați;
- b) Să se arate că numărul $A = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{1995}$ se divide cu 400;
- c) Să se arate că suma $S = 6^{101} + 6^{102} + 6^{103} + \dots + 6^{1000}$ este divizibilă prin 6480;
- d) Să se arate că numărul $B = 8 + 8^2 + 8^3 + \dots + 8^{888}$ este divizibil cu 73;
- e) Să se arate că numărul $C = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1992}$ se divide prin 39, 40 și 41;
- f) Să se arate că numărul $N = 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^{2004}$ este divizibil cu patru numere naturale consecutive.
- g) Fie $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1995}$. Arătați că S se divide cu 434 și deduceți apoi că $2^{1995} - 1$ se divide cu 217.

8.

- a) Să se arate că numărul $a = 86^{86} + 87^{87} + 88^{88}$ este divizibil cu 5.
- b) Arătați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ numărul $b = n^{51} - n^{15}$ se divide cu 10;
- c) Determinați numerele naturale n pentru care numărul $c = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + 9^n$ să se dividă cu 5.
- d) Arătați că oricum am alege 7 numere naturale pătrate perfecte, există două printre acestea a căror diferență se divide cu 10.
- e) Arătați că oricum am alege 5 numere naturale pătrate perfecte, există două printre acestea a căror sumă sau diferență se divide cu 10.

9.

- a) Arătați că numărul $A = 1971^5 + 1972^4 + 1973^3$ este un multiplu de 9;
- b) Arătați că numărul $B = 3^{240} + 7^{240} - 5^{240} - 9^{100}$ este divizibil cu 8;
- c) Arătați că numărul $C = 2^{123} + 3^{78} - 2$ este un multiplu de 7;
- d) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $7 \mid (2^n - 1)$ dacă și numai dacă $3 \mid n$ și că $7 \mid (3^n - 1)$ dacă și numai dacă $6 \mid n$;

10. a) Notăm cu $S(a)$ suma cifrelor numărului natural a . Arătați că $9 \mid a - S(a)$;

- b) Fie numărul $B = 2004^{2005}$. Notăm cu S_1 suma cifrelor lui B , cu S_2 suma cifrelor numărului S_1 , cu S_3 suma cifrelor numărului S_2 și așa mai departe până se obține un număr cu o singură cifră. Care este

acesta?

c) Să se arate că numărul $N = 10^1 + 10^2 + \dots + 10^n + 9 \cdot n^2 - 19 \cdot n$ este divizibil cu 27, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

11. Notăm cu $S(a)$ suma cifrelor numărului a . Dacă $S(a) = S(3 \cdot a)$, demonstrați că:

- a) a se divide prin 3;
- b) a se divide prin 9;
- c) este posibil ca a să nu fie divizibil prin 27.

12. Să se arate că numărul $N = 1^{2005} + 91^{2005} + 991^{2005} + \dots + \underbrace{99\dots9}_{1988 \text{ de ori}} 1^{2005}$ este divizibil cu 9.

13. Arătați că pentru orice numere naturale a, b, c, d nedivizibile cu 3, numărul $N = 2 \cdot a^2 + 5 \cdot b^2 + 7 \cdot c^6 + 13 \cdot d^8$ este divizibil cu 3.

14. Pe o tablă este scris numărul 321321321321. Ce cifre trebuie șterse pentru ca să se obțină cel mai mare număr posibil care se divide prin 9? Care este acest număr?

15.

a) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$. Arătați că $13 \mid \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_n} \Leftrightarrow 13 \mid (\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-3}} - \overline{a_{n-2} a_{n-1} a_n})$

b) Arătați că $13 \mid \underbrace{11122\dots2111}_{3n \text{ ori}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

16. Demonstrați că numărul $\underbrace{11\dots1}_{81 \text{ de ori}}$ se divide cu 81.

17. Demonstrați că numărul $N = 100101102103\dots121122$ se divide cu 37.

18. Fie a o cifră nenulă. Aflați valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\overline{aaaaa} \mid \underbrace{\overline{aa\dots a}}_{n \text{ cifre}}$.

19. Aflați cel mai mic număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $9^3 \mid \underbrace{99\dots9}_{n \text{ cifre}}$.

20. Numărul $A = \underbrace{11\dots1}_{n \text{ cifre}}$ se divide prin 7. Să se arate că A se divide și prin 13.

21. Se consideră șirul de numere $n_1 = 1$, $n_2 = 2 \cdot 3$, $n_3 = 4 \cdot 5 \cdot 6$, $n_4 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, ... și suma $S_k = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

- a) Să se arate că $7776 \mid n_{10}$;
- b) Să se arate că S_k nu poate fi pătrat perfect.

22. Determinați cel mai mic număr natural divizibil cu 84 care se scrie numai cu cifrele 6 și 7.

23. Fie $A = \{6, 15, 24, 33, \dots\}$ mulțimea numerelor naturale nenule care au proprietatea că suma cifrelor sale se divide cu 6. Arătați că:

- a) A conține o infinitate de pătrate perfecte;
- b) Mulțimea A nu conține numere consecutive.

24. Arătați că nu există numere naturale nenule n astfel încât $(6^n - 1) \mid (7^n - 1)$.

25. Arătați că numărul $N = 72^n - 12^n - 6^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ se divide cu 55.

26. Fie $a_1, a_2, \dots, a_{100} \in \mathbb{N}$, $A = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ și $B = a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_{100}^5$. Arătați că $5 \mid A \Leftrightarrow 5 \mid B$.

27. Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2005} \in \mathbb{N}$. Să se arate că numărul $N = 2005^{(a_1+a_2)(a_2+a_3)\dots(a_{2004}+a_{2005})(a_{2005}+a_1)} - 1$ se divide cu 2004·2006.

- 28.** Care numere naturale de la 1 la 1000000 sunt mai multe: cele care se divid prin 11 dar nu se divid prin 13 sau cele care se divid prin 13 dar nu se divid prin 11?
- 29.** Arătați că fracția $\frac{3 \cdot 16^n + 2 \cdot 3^{3n} + 6 \cdot 38^n}{14^n \cdot 13^n + 10 \cdot 6^n}$, $n \in \mathbb{N}$ se simplifică prin 11.
- 30.** Fie suma $S = \frac{1}{39} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{50}$. Dacă $S = \frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}^*$ și $(a, b) = 1$, să se arate că b este un număr par iar a se divide cu 89.
- 31.** Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu astfel încât $\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{101}$. Arătați că $a - b$ este divizibil cu 103.

Tema pentru acasă:

Exercițiile: nr.2, nr. 3 (b, c, d, e), nr. 4 (b, c), nr. 5, nr. 7 (a, b, c, d, e, f, g), nr. 8 (a, b, c), nr. 9 (c, d), nr. 10 (c), nr. 12, nr. 13, nr. 14, nr. 16, nr. 17, nr. 18, nr. 19, nr. 23, nr. 24, nr. 25, nr. 28, nr. 31